1.6.4 Svislý vrh

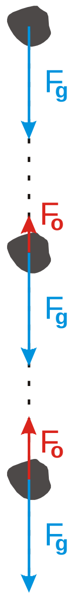
Předpoklady: 1126, 1602

Pedagogická poznámka: Obsah odpovídá spíše dvěma vyučovacím hodinách. Z hlediska dalších hodin je důležité dopočítat se k příkladu číslo 7. Hodina patří mezi ty, které závisí na znalostech z matematiky. Pokud mají žáci problémy kvůli matematice, asi s tím nic neuděláte, ale je dobré jim sdělit, kde se problémy rodí, aby zbytečně neobviňovali matematiku.

Homogenní pole je nejjednodušším případem gravitačního pole, pohyby těles v homogenním poli se nazývají **vrhy.**

Nejjednodušší případ vrhu: svislý vrh (předmět pustíme, hodíme svisle vzhůru nebo svisle dolů).

Př. 1: Do obrázku nakresli několik poloh kamene, který volně padá z výšky *h*. Do každé polohy vyznač působící síly. Popiš pohyb kamene.



Na kámen působí během pádu dvě síly:

- gravitační síla Země F_g kolmo dolů (její velikost se prakticky nemění)
- odpor vzduchu F_o proti směru pohybu, tedy kolmo vzhůru (roste s rychlostí pádu).

Kámen během pádu zrychluje, ale velikost jeho zrychlení se s rostoucím odporem vzduchu zmenšuje.

- Při malých rychlostech je velikost odporu vzduchu v porovnání s gravitační silou u většiny předmětů velmi malá,
- velikost odporu vzduchu se neustále mění (a to by komplikovalo výpočty),
- pro velikost odporu vzduchu zatím nemáme vzorec,

$\Rightarrow$ ve všech příkladech v této části budeme odpor vzduchu zanedbávat.

Př. 2: Kámen volně pustíme z výšky *h*. Jakým pohybem se bude pohybovat? Změní se druh pohybu pokud kámen hodíme (směrem nahoru nebo dolů). Odpor vzduchu zanedbej.

Zanedbáme odpor vzduchu $\Rightarrow$ na kámen působí pouze gravitační síla $\Rightarrow$ gravitační síla je výslednou silou působící na kámen $\Rightarrow$ výsledná síla na kámen se nemění $\Rightarrow$ kámen se pohybuje rovnoměrně zrychleně.

Zrychlení kamene: $a = \frac{F}{m} = \frac{F_g}{m} = \frac{mg}{m} = g$.

Hodíme kamen $\Rightarrow$ působící síly se nezmění $\Rightarrow$ kámen se stále pohybuje rovnoměrně zrychleně, ale s nenulovou počáteční rychlostí.

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

Při řešení velké většiny příkladů na vrhy se používá stejná soustava souřadnic. Počátek leží na zemi, osa *y* směřuje kolmo vzhůru. Při takové volbě soustavy souřadnic platí $a = -g$ (znaménko mínus, protože gravitační zrychlení směřuje kolmo dolů, proti ose *y*) $\Rightarrow$ získáme soustavu rovnic:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 - gt$$

Př. 3: Z výšky dvou metrů volně pustíme křídu. Za jak dlouho dopadne na zem? Jakou rychlostí?

$y_0 = 2\,\text{m}$, $y = 0\,\text{m}$ (křída dopadá na zem), $v_o = 0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (křídu volně pouštíme), $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $t = ?$, $v = ?$

Čas vypočteme dosazením do rovnice pro polohu.

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 2 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} 10 t^2$$

$$0 = 2 - 5t^2$$

$$5t^2 = 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow t = \pm 0{,}63\,\text{s}$$

$v = v_0 - gt = 0 - 10 \cdot 0{,}63\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = -6{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (rychlost křídy v okamžiku dopadu směřuje dolů)

Křída dopadne za 0,63 s rychlostí $6{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dodatek: Fyzikální význam má i záporný kořen rovnice. V čase –0,63 s, tedy 0,63 sekundy před okamžikem, kdy jsme křídu vypustili, bychom ji museli vyhodit (rychlostí $6{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) směrem nahoru, aby v čase 0s byla přesně ve výšce 2 m.

Př. 4: Vysvětli, jak je možné pomocí kamene a stopek změřit hloubku propasti.

Kámen volně pustíme do propasti (padá pak volným pádem) a měříme čas než uslyšíme jeho dopad na dno. Ze změřeného času vypočteme hloubku pádu.

Př. 5: Z věže vysoké 60 m byla směrem kolmo vzhůru vystřelena světlice rychlostí $20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Za jak dlouho dopadne na zem? Jaký je fyzikální význam záporného kořenu rovnice?

$y = 0\,\mathrm{m}$ (dopad na zem), $y_0 = 60\,\mathrm{m}$, $v_0 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (házíme nahoru ve směru osy y),
$g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $t = ?$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 60 + 20t - \frac{1}{2}\cdot 10t^2$$

$$0 = 60 + 20t - 5t^2$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$t_1 = 6\,\mathrm{s}$ $\qquad$ $t_2 = -2\,\mathrm{s}$

Světlice dopadne na zem za 6 s.
Světlici bychom museli vystřelit dvě sekundy před tím než by se ocitla na vrcholu věže, aby zbytek jejího pohybu byl přesně stejný jako by byla vystřelena z věže přesně podle zadání.

Př. 6: Spočti zpaměti, jakou rychlostí bysme museli světlici vystřelit ze země, aby letěla podle zadání příkladu.

Pokud bychom stříleli ze země, světlice by letěla 2 sekund na vrchol věže a pak 6 sekund než by dopadla na zem $\Rightarrow$ celkem 8 sekund ve vzduchu $\Rightarrow$ 4 sekundy stoupá a během toho ztratí rychlost $40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (každou sekundu $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) $\Rightarrow$ musíme ji vystřelit rychlostí $40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Př. 7: Do jaké maximální výšky vystoupá šíp vystřelený kolmo vzhůru rychlostí $45\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Výsledek spočti konkrétně a potom odvoď obecný vzorec pro maximální výšku svislého vrhu.

$v_0 = 45\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $y_0 = 0\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $y = ?$

Výšku určíme z rovnice pro polohu $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, ale musíme znát čas t, ve kterém se šíp nachází v maximální výšce.
Čím je zajímavý okamžik, kdy je šíp nejvýše? Šíp se v něma zastaví, přestává stoupat a začíná padat $\Rightarrow$ $v = 0$ $\Rightarrow$ čas určíme z rovnice pro rychlost.

$$v = 0 = v_0 - gt \;\Rightarrow\; v_0 = gt \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0}{g} = \frac{45}{10}\,\mathrm{s} = 4{,}5\,\mathrm{s}$$

Dosadíme do rovnice pro polohu: $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 + 45\cdot 4{,}5 - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4{,}5^2\ \mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}$

Obecný vztah: Do rovnice pro polohu dosadíme výraz pro čas.

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Šíp vystoupá do výšky 100 m. Výška svislého vrhu je dána vztahem $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Př. 8: Kolikrát se zvětší výška, do které vyletí svisle vyhozený míč, změní-li se počátečních rychlost hodu na dvojnásobek?

$v_2 = 2v_1 \qquad h_2 = ?$

Platí: $h_1 = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \qquad h_2 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{v_2^2}{2 \cdot g}}{\frac{v_2^2}{2 \cdot g}} = \frac{v_2^2}{v_2^2}$$

Dosadíme $v_2 = 2v_1$: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{(2v_1)^2}{v_1^2} = \frac{4v_1^2}{v_1^2} \Rightarrow h_2 = 4h_1$.

Výška, do které vyletí svisle hozený míč, se při zvětšení počáteční rychlosti na dvojnásobek zvětší čtyřikrát.

Př. 9: Z okna ve výšce 40 m hodíme kolmo dolů klíče rychlostí $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Za jak dlouho a jakou rychlostí dopadnou na zem? Jak by se doba pádu a rychlost dopadu změnily, kdybychom klíče hodili stejnou rychlostí vzhůru?

$y_0 = 40\,\mathrm{m}$, $v_0 = -10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (házeme dolů proti směru osy *y*), $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t = ?$, $v = ?$

Podobný příklad jako dříve, dosadíme do rovnice pro polohu.

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 40 - 10t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$$

$$0 = 8 - 2t - t^2$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-2) = 0$$

$t_1 = 2\,\mathrm{s} \qquad t_2 = -4\,\mathrm{s}$

$$v = v_0 - gt = -10 - 10 \cdot 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Klíče dopadnou za 2 sekundy rychlostí $30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Klíče hodíme směrem vzhůru: $y_0 = 40\,\mathrm{m}$, $v_0 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (házeme nahoru ve směru osy *y*).

$g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t = ?$, $v = ?$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 40 + 10t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$$

$$0 = 8 + 2t - t^2$$

$t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+2) = 0$

$t_1 = 4\,\text{s}$ $\qquad$ $t_2 = -2\,\text{s}$

$v = v_0 - gt = 10 - 10 \cdot 4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = -30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Klíče dopadnou za 4 sekundy rychlostí $30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Př. 10: Vysvětli, proč rychlost, kterou klíče dopadnou na zem, nezávisí na směru, kterým je hodíme (kolmo vzhůru nebo kolmo dolů).

Zanedbáváme odpor vzduchu $\Rightarrow$ platí zákon zachování mechanické energie. Při dopadu mají klíče pouze kinetickou energii, v okamžiku hodu mají v obou případech stejnou potenciální energii (házeme ze stejné výšky) i stejnou kinetickou energii (záleží pouze na velikosti rychlosti, ne směru) $\Rightarrow$ v obou případech stejná celková mechanická energie $\Rightarrow$ v obou případech stejná rychlost dopadu.

Př. 11: Jakou rychlostí musíme z balkónu ve výšce 15 m hodit pírko, aby dopadlo na zem za a) 1 sekundu, b) za 6 sekund.

$y = 0\,\text{m}$, $y_0 = 15\,\text{m}$, $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $t = 1\,\text{s}$ (bod b) $t = 6\,\text{s}$), $v_0 = ?$

Zadané veličiny i hledaná počáteční rychlost se vyskytují v rovnice pro polohu.

$$y = 0 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad / \cdot 2$$

$$0 = 2y_0 + 2v_0 t - gt^2$$

$$gt^2 - 2y_0 = 2v_0 t \ \Rightarrow\ v_0 = \frac{gt^2 - 2y_0}{2t}$$

Dosazení:

a) $t = 1\,\text{s}$: $v_0 = \dfrac{gt^2 - 2y_0}{2t} = \dfrac{10 \cdot 1^2 - 2 \cdot 15}{2 \cdot 1}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = -10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (házeme dolů)

b) $t = 6\,\text{s}$: $v_0 = \dfrac{gt^2 - 2y_0}{2t} = \dfrac{10 \cdot 6^2 - 2 \cdot 15}{2 \cdot 6}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 27{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (házeme nahoru)

Zadání je však zjevně nesmyslné, protože odpor vzduchu působící na pírko zanedbat nemůžeme.

Př. 12: Raketa, která byla z povrchu Země vypuštěna ve vertikálním směru, se pohybovala svisle vzhůru se stálým zrychlením $2\,\text{g}$. Po $10\,\text{s}$ od startu přestaly motory rakety pracovat. Vypočti, do jaké výšky raketa vystoupí. Odpor vzduchu zanedbej.

$a = 2\text{g}$ $\qquad$ $t = 10\,\text{s}$ $\qquad$ $h_{max} = ?$

Pohyb rakety se skládá ze dvou částí.

- V první části (dokud fungují motory), se raketa pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $2g$.
- V druhé části raketa zpomaluje se zrychlením g (působí na ní pouze gravitační síla) – druhá část je tedy svislý vrh vzhůru s počáteční rychlostí, kterou raketa získala za dobu činnosti motorů (v první části pohybu).

a) vzdálenost uražená v první fázi

Raketa se pohybuje rovnoměrně s nulovou počáteční rychlostí.

$$h_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}2gt^2 = gt^2$$

b) vzdálenost uražená v druhé fázi

Jde o svislý vrh vzhůru. Pro maximální výšku svislého vrhu platí vztah $h_2 = \frac{v_0^2}{2g}$.

Počáteční rychlost druhé fáze pohybu je rovna konečné rychlosti, kterou získala raketa při zrychlování. $v_1 = at = 2gt$.

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(2g)^2 t^2}{2g} = 2gt^2$$

c) celková výška letu rakety

$$h = h_1 + h_2 = gt^2 + 2gt^2 = 3gt^2$$

$$h = 3gt^2 = 3 \cdot 10 \cdot 10^2 \,\mathrm{m} = 3 \cdot 10^3 \,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{km}$$

Raketa vystoupí do výšky $3\,\mathrm{km}$.

Př. 13: Žonglér vyhazuje míčky svisle vzhůru počáteční rychlostí $6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. V okamžiku, kdy míček dosáhne vrcholu své dráhy, vyhodí svisle vzhůru další stejnou počáteční rychlostí. Za jakou dobu a v jaké výšce se oba míčky setkají?

$v_0 = 6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (házíme nahoru), $t_s = ?$, $h_s = ?$

Sledujeme pohyb obou těles od okamžiku, kdy byl hozen druhý míček. Od tohoto okamžiku padá první míček volným pádem z nejvyšší dosažené výšky. Druhý míček se pohybuje rovnoměrně zpomaleně vzhůru. V okamžiku setkání jsou oba míčky se stejné výšce (poloze).

Maximální výška dosažená prvním míčkem: $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ (odvozeno dříve).

Dráha prvního míčku z nejvyššího místa (volný pád): $y_1 = y_{\max} - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2}gt^2$.

Dráha druhého míčku od vyhození (svislý vrh vzhůru): $y_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

V okamžiku setkání jsou oba míčky se stejné výšce (poloze) $y_1 = y_2$.

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{v_0^2}{2g} = v_0 t$$

$$t = \frac{v_0}{2g}$$

Dosadíme vypočtený do rovnice pro dráhu druhého míčku (ta má význam výšky nad místem vyhození, dráha prvního míčku je dráhou uraženou směrem dolů z nejvyššího bodu).

$$h_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \frac{v_0}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{2g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{8g} = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

$$t = \frac{v_0}{2g} = \frac{6}{2 \cdot 10}\,\mathrm{s} = 0{,}3\,\mathrm{s}$$

$$h_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{3}{8} \cdot \frac{6^2}{10}\,\mathrm{m} = 1{,}35\,\mathrm{m}\,.$$

Oba míčky se setkají za $0{,}3\,\mathrm{s}$ ve výšce $1{,}35\,\mathrm{m}$.

Shrnutí: Svislý vrh je rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $g = 10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.